MENGENAL HIMPUNAN KABUR *(FUZZY SET)* DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA : SUATU KAJIAN PUSTAKA

I Made Yasna
FPMIPA IKIP SARASWATI
dekyasna@gmail.com

ABSTRAK

Teori himpunan sebagai bagian dari matematika telah mengalami perkembangan. Salah satunya adalah himpunan kabur. Walaupun telah sering dibicarakan pada berbagai seminar matematika maupun seminar pendidikan matematika namun, di indonesia himpunan kabur masih relatif baru sehingga layak disajikan dan diperkenalkan kepada dosen dan mahasiswa pendidikan matematika. Sebagai langkah awal, pembahasan dibatasi hanya pada himpunan bagian kabur dan operasi-operasinya yang terdiri dari komplemen, gabungan, dan irisan serta indeks kekaburan.

Kata Kunci : Himpunan kabur, gabungan, irisan, indeks kekaburan

INTRODUCE THE FUZZY SET IN MATHENATICS LEARNING: A LITERATURE REVIEW

ABSTRACT

The set theory as part of mathematics has progressed. One of them is fuzzy sets. Although it has often been discussed in various mathematics seminars and seminars of mathematics education. However, in indonesia the fuzzy set is still relatively new so it is worthy presented and introduced to lecturers and students of mathematics education. As a first step, the discussion is limited only to the part of the fuzzy set and its operations consisting of complement, union, intersection and fuzzyness index.

Keyword : Fuzzy set,union, intersection, fuzzyness indeks

PENDAHULUAN

Pengertian himpunan kabur yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah perluasan dari pengertian himpunan yang telah dikenal. Untuk membedakan kedua himpunan ini, maka himpunan yang telah dikenal selanjutnya disebut ***himpunan sederhana***. Himpunan kabur telah banyak dibicarakan pada seminar matematika maupun seminar pendidikan matematika diberbagai kesempatan. Konsep dasarnya sangat sederhana namun sangat besar manfaatnya, karena dengan konsep sederhana itu dapat dibuat model untuk menemukan penyelesaian masalah dalam kehidupan sehari-hari. Konsep tersebut akan diperluas berdasarkan pengertian himpunan bagian kabur. Perluasan inilah yang dijadikan pokok bahasan pada tulisan ini.

Himpunan Kabur (Fuzzy Set) sebagai cabang dari matematika pertama kali dicetuskan oleh Lutfi Zadeh pada awal tahun 1965 di Universitas California di Barkley. Teori ini dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, antara lain: diagnose medis, sistem pendukung keputusan, ekonomi, psikologi, lingkungan, keamanan dan ilmu pengetahuan dan lain-lain (Setiadji, 2009). Himpunan kabur ini masih relative baru di Indonesia, sehingga belum semua perguruan tinggi yang memiliki jurusan matematika menyelenggarakan mata kuliah ini. Dengan alasan itulah penulis mengangkat materi ini sebagai langkah awal dalam belajar dan mengenal himpunan kabur. Pembahasan materi ini akan dibatasi pada beberapa konsep himpunan kabur dan operasi-operasi himpunan kabur, yaitu komplemen, irisan, dan gabungan.

PEMBAHASAN

Konsep Himpunan Bagian Kabur

Dalam himpunan sederhana, himpunan memiliki ciri sebagai berikut.

Misalkan S himpunan semesta, A sebagai himpunan memiliki sifat :

i. A C S
ii. Untuk setiap x ϵ S hanya salah satu yang berlaku : x ϵ A atau x ∉ A.

Contoh 1 :

Misalkan S himpunan semua nama bulan masehi dan A himpunan nama-nama bulan masehi yang terdiri dari 30 hari. Berarti April, Juni, September, dan Nopember merupakan anggota-anggota dari A dan ditulis A = { April, Juni, September, dan Nopember}.

Januari anggota S, tetapi Januari bukan anggota A. Demikian pula untuk Februari, Maret dan Mei.

Pengertian keanggotaan dalam A dapat dinyatakan dengan fungsi karateristik $f_A(x)$ untuk setiap x ϵ A sedemikian sehingga

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, \; jika \; x \in A \\ 0, \; jika \; x \notin A \end{cases}$$

Dengan demikian dari contoh 1 tersebut di atas, A dapat ditulis

A = {(Januari, 0), (Februari, 0), (Maret, 0), (April,1), (Mei, 0), (Juni, 1), (Juli, 0), (Agustus, 0,) (September, 1), (Oktober, 0), (Nopember, 1), (Desember, 0) }

Nilai 0 atau 1 dari fungsi karakteristik itu menentukan apakah anggota dari semesta menjadi sebuah anggota sebuah himpunan atau tidak. Selanjutnya bagaimana jika nilai fungsi karakteristik diperluas tidak hanya 0 atau 1, tetapi dalam sebuah interval tertutup [0, 1] ?

Jika nilai dari fungsi karateristik tersebut dalam interval, maka nilai-nilai yang dipasangkan dengan setiap anggota himpunan semesta tersebut menunjukkan derajat keanggotaan dari anggota-anggota yang ditunjuk. Semakin besar nilainya semakin tinggi derajat keanggotaannya dalam suatu himpunan. Fungsi karak_ teristik yang memasangkan setiap anggota semesta dengan nilai $f_A(x)$ disebut ***fungsi keanggotaan*** dan himpunan yang didefinisikan dengan fungsi karateristik tersebut dinamakan ***Himpunan Kabur***

(Fuzzy Set).

Secara umum :

Misalkan S himpunan semesta. Fungsi keanggotaan $f_{\mathcal{A}}$ dari himpunan kabur $\mathcal{A}$ didefinisikan sebagai $f_{\mathcal{A}} : S \longrightarrow M$, dengan M interval dari bilangan real tertentu, sedemikian sehingga $\mathcal{A} = \{ (x, f_A(x)) \mid x \in S \}$. Biasanya M = [0, 1]. Dibaca : $\mathcal{A}$ adalah himpunan yang anggotanya x dengan derajat keanggotaan $f_A(x)$. x anggota S.

Dalam hal ini dapat dijelaskan bahwa suatu $x \in S$ dikatakan :

a. bukan anggota $\mathcal{A}$, jika $f_A(x) = 0$
b. anggota $\mathcal{A}$ dengan serajat keanggotaan yang rendah, jika $f_A(x) \sim 0$
c. anggota $\mathcal{A}$ dengan serajat keanggotaan yang tinggi, jika $f_A(x) \sim 1$
d. anggota $\mathcal{A}$ seutuhnya, jika $f_A(x) = 1$ (Maman A. Djauhari. 1994)

Operasi-Operasi Himpunan Bagian Kabur

Operasi-operasi himpunan bagian sederhana seperti Komplemen, gabungan, dan irisan dapat dinyatakan melalui fungsi karakteristik. Demikian juga operasi-operasi antar himpunan bagian kabur. Sebelum membahas operasi-operasi gabungan, irisan, dan komplemen, terlebih dahulu akan dibahas tentang himpunan kosong, himpunan bagian kabur, dan kesamaan himpunan.

Misalkan S himpunan semesta

1. Suatu himpunan kabur $\mathcal{A}$ dikatakan kosong jika dan hanya jika untuk setiap $x \in S$, nilai fungsi keanggotaan $\mathcal{A}$, yaitu $f_A(x) = 0$.
2. Jika derajat keanggotaan setiap elemen S dalam himpunan kabur $\mathcal{A}$ kurang dari atau sama dengan derajat keanggotaan himpunan kabur, maka $\mathcal{A}$ dikatakan *himpunan bagian (subset)* dari $\mathcal{B}$.
   Notasinya : $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x), \forall x \in S$
3. Himpunan kabur $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dikatakan sama, ditulis $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ jika dan hanya jika $f_A(x) = f_B(x)$ untuk setiap x anggota S.
   Notasinya : $\mathcal{A} = \mathcal{B} \leftrightarrow f_A(x) = f_B(x), \forall x \in S$
4. Himpunan kabur $\mathcal{A}$ dikatakan himpunan bagian sejati *(proper subset)* dari $\mathcal{B}$, jika $\mathcal{A}$ himpunan bagian kabur dari $\mathcal{B}$ dan keduanya tidak sama.
   Notasinya : $\mathcal{A} Ç \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}, \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ (Tatag Yuli Eko S, 1998)

Contoh 2 :

Misalkan S menyatakan usia mannusia dalam tahun, yang ditenttukan S = { 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60 70, 80 }. Himpunan kabur-himpunan kabur A,B,C dan D menyatakan kategori-kategori bayi, dewasa, muda dan tua. Derajat keanggotaan dari himpunan kabur-himpunan kabur tersebut dinyatakan dalam tabel berikut :

Usia	A (Bayi)	B (Dewasa)	C (Muda)	D (Tua)
5	0	0	1	0
10	0	0	1	0
20	0	0,8	0,8	0,1
30	0	1	0,5	0,2
40	0	1	0,2	0,4
50	0	1	0,1	0,8
60	0	1	0	0,8
70	0	1	0	1
80	0	1	0	1

Dari contoh 2 di atas, maka

(1)A merupakan himpunan kosong, karena $f_A(x) = 0$, untuk setiap $x \in S$.

(2) D C B, karena $f_D(x) \leq f_B(x)$, $\forall$ x ϵ S. dengan demikian dapat diartikan bahwa orang tua merupakan bagian dari orang dewasa. Lebih lanjut D merupakan himpunan bagian sejati dari B.

(3) Dari himpunan A, B, C dan D tidak ada sebuah himpunan yang sama dengan yang lainnya.

Komplemen

Komplemen dari suatu himpunan bagian kabur $\mathcal{A}$ diberi symbol $\mathcal{A}^C$. Sedangkan A^C menyatakan komplemen dari himpunan sederhana A. Pada teori himpunan sederhana, A^C didefinisikan melalui fungsi karakteristik $f_A{}^c$ sebagai berikut : $f_A{}^c(x) = 1 - f_A(x)$ untuk setiap x ϵ S.

Sejalan dengan definisi ini, maka $\mathcal{A}^C$ didefinisikan melalui fungsi keanggotaan $f_{\mathcal{A}}$ sebagai berikut : $f_A{}^c(x) = 1 - f_A(x)$ untuk setiap x ϵ S.

Berdasarkan definisi ini, maka sifat ini terpenuhi :

$[\mathcal{A}^C]^C = \mathcal{A}$ sebab $f[_{\mathcal{A}}{}^C]^c(x) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x)$
$= 1 - \{1 - f_{\mathcal{A}}(x)\} = f_{\mathcal{A}}(x)$.

Contoh 3 :

Misalkan himpunan semesta S = { a, b, c, d, e, f, g, h }. $\mathcal{A}$ C S dan $\mathcal{B}$ C S dengan

$\mathcal{A}$ = {(a|0,13), (b|0,61), (c|0), (d|0), (e|1), (f|0,06), (g|0,5),(h|0)},

$\mathcal{B}$ = {(a|0,87), (b|0,49), (c|1), (d|1), (e|0), (f|0,98), (g|0,4), (h|1)}.

a. Tentukan $\mathcal{A}^C$, b. apakah $\mathcal{A}^C$ C $\mathcal{B}$?

Penyelesaian :

a. Karena $f_{\mathcal{A}}{}^C(x) = 1 - f_{\mathcal{A}}(x)$ untuk setiap x ϵ S, maka

$f_{\mathcal{A}}{}^c(a) = 1 - f_{\mathcal{A}}(a) = 1 - 0,13 = 0,87$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(b) = 1 - f_{\mathcal{A}}(b) = 1 - 0,61 = 0,39$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(c) = 1 - f_{\mathcal{A}}(c) = 1 - 0 = 1$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(d) = 1 - f_{\mathcal{A}}(d) = 1 - 0 = 1$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(e) = 1 - f_{\mathcal{A}}(e) = 1 - 1 = 0$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(f) = 1 - f_{\mathcal{A}}(f) = 1 - 0,06 = 0,94$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(g) = 1 - f_{\mathcal{A}}(g) = 1 - 0,5 = 0,5$;
$f_{\mathcal{A}}{}^c(h) = 1 - f_{\mathcal{A}}(h) = 1 - 1 = 0$.

Jadi $\mathcal{A}^C$ = {{(a|0,87), (b|0,39), (c|1), (d|1), (e|0), (f|0,94), (g|0,5), (h|0)}.

b. Jika dibandingkan $f_{\mathcal{A}}{}^C$ dan dan $f_{\mathcal{B}}$, diperoleh $f_{\mathcal{A}}{}^C(a) = f_{\mathcal{B}}(a)$; $f_{\mathcal{A}}{}^C(b) < f_{\mathcal{B}}(b)$;
$f_{\mathcal{A}}{}^C(c) = f_{\mathcal{B}}(c)$; $f_{\mathcal{A}}{}^C(d) = f_{\mathcal{B}}(d)$;
$f_{\mathcal{A}}{}^C(e) = f_{\mathcal{B}}(e)$; $f_{\mathcal{A}}{}^C(f) < f_{\mathcal{B}}(f)$;
$f_{\mathcal{A}}{}^C(g) = f_{\mathcal{B}}(g)$;
$f_{\mathcal{A}}{}^C(h) = f_{\mathcal{B}}(h)$.
Ternyata ada x sedemikian hingga $f_{\mathcal{A}}{}^C(x) \leq f_{\mathcal{B}}(x)$. Jadi $\mathcal{A}^C$ C $\mathcal{B}$.

Irisan (Intersection)

Misalkan S himpunan semesta, $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ adalah dua himpunan bagian kabur dari S.

Jika A dan B dua himpunan bagian sederhana dari S, yang dimaksud dengan Irisan dari $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ditulis : $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ adalah himpunan bagian kabur yang memiliiki fungsi keanggotaan :

$$f_{A \cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$$

Definisi ini merupakan definisi standar dari irisan kabur.

Artinya, $f_{A \cap B}(x)$ = yang terkecil diantara $f_A(x)$ dan $f_B(x)$. dan dapat pula A

∩ B

dinyatakan dengan $f_{A\cap B}(x) = [f_A(x), f_B(x)]$,

Contoh 4 :

Himpunan semesta S = { a, b, c, d, e, f } dan $\mathcal{A}$ C S, $\mathcal{B}$ C S didefinisikan sebagai berikut :

$\mathcal{A}$ = {(a|0,2), (b|0,7), (c|1), (d|0), (e|0,5), (f|0,2)}

$\mathcal{B}$ = {(a|0,5), (b|0,3), (c|1), (d|0,1), (e|0,5), (f|0,3)}.

Tentukanlah : $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$!

Penyelesaian :

Dihitung dulu min { $f_A(x)$, $f_B(x)$} untuk setiap x ϵ S.

min { $f_A(a)$, $f_B(a)$} = min {0,2 ; 0,5} = 0,2 = $f_{A\cap B}(a)$

min { $f_A(b)$, $f_B(b)$} = min {0,7 ; 0,3} = 0,3 = $f_{A\cap B}(b)$

min { $f_A(c)$, $f_B(c)$} = min {1 ; 1} = 1 = $f_{A\cap B}(c)$

min { $f_A(d)$, $f_B(d)$} = min {0 ; 0,1} = 0 = $f_{A\cap B}(d)$

min { $f_A(e)$, $f_B(e)$} = min {0,5 ; 0,5} = 0,5 = $f_{A\cap B}(e)$

min { $f_A(f)$, $f_B(f)$} = min {0,2 ; 0,3} = 0,2 = $f_{A\cap B}(f)$

Jadi $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ = {(a|0,2), (b|0,2), (c|1), (d|0), (e|0,5), (f|0,2)}

Definisi secara umum dijelaskan sebagai berikut Irisan dua himpunan kabur $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ dinyatakan dengan fungsi i : [0,1] × [0,1] → [0,1] untuk setiap x anggota himpunan semesta. Fungsi ini menyatakan bahwa pasangan derajat keanggotaan elemen x dalam himpunan kabur $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ menghasikan derajat keanggotaan x dalam irisan $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$.

Dengan demikian derajat keanggotaan dari sebuah elemen dalam $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ adalah $f_{A\cap B}(x)$ = { $f_A(x)$, $f_B(x)$} (Tatag Yuli Eko S, 1998).

Gabungan (Union)

Misalkan S himpunan semesta, $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ adalah dua himpunan bagian kabur dari S.

Jika A dan B dua himpunan bagian sederhana dari S, yang dimaksud dengan Gabungan dari $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ditulis : $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ adalah himpunan bagian kabur yang memiliiki fungsi keanggotaan :

$$f_{A\cup B}(x) = \text{maks } \{ f_A(x), f_B(x)\}$$

Definisi ini juga merupakan definisi standar dari gabungan kabur.

Artinya, $f_{A\cup B}(x)$ = yang terbesar diantara $f_A(x)$ dan $f_B(x)$, dan dapat pula A ∪ B dinyatakan dengan $f_{A\cup B}(x) = [f_A(x), f_B(x)]$.

Contoh 5 :

Himpunan semesta S = { a, b, c, d, e, f } dan $\mathcal{A}$ C S, $\mathcal{B}$ C S didefinisikan sebagai berikut

$\mathcal{A}$ = {(a|0,2), (b|0,7), (c|1), (d|0), (e|0,5), (f|0,2)}

$\mathcal{B}$ = {(a|0,5), (b|0,3), (c|1), (d|0,1), (e|0,5), (f|0,3)}.

Tentukanlah : $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$!

Penyelesaian :

Dihitung dulu maks { $f_A(x)$, $f_B(x)$} untuk setiap x ϵ S.

maks { $f_A(a)$, $f_B(a)$} = maks {0,2 ; 0,5} = 0,5 = $f_{A\cup B}(a)$

maks { $f_A(b)$, $f_B(b)$} = maks {0,7 ; 0,3} = 0,7 = $f_{A\cup B}(b)$

maks { $f_A(c)$, $f_B(c)$} = maks {1 ; 1} = 1 = $f_{A\cup B}(c)$

maks { $f_A(d)$, $f_B(d)$} = maks {0 ; 0,1} = 0,1 = $f_{A\cup B}(d)$

maks { f_A(e), f_B (e)} = maks {0,5 ; 0,5} = 0,5 = $f_{A \cup B}$(e)

maks { f_A(f), f_B (f)} = maks {0,2 ; 0,3} = 0,3 = $f_{A \cup B}$(f)

Jadi $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ = {(a|0,5), (b|0,7), (c|1), (d|0,1), (e|0,5), (f|0,3)}.

Definisi gabungan yang lebih umum dijelaskan sebagai berikut :

Gabungan dari dua himpunan kabur $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$, secara umum dinyatakan dengan fungsi

u : [0,1] × [0,1] → [0,1] untuk setiap x anggota himpunan semesta. Fungsi ini menyatakan bahwa pasangan derajat keanggotaan dari elemen x dalam himpunan kabur $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ menghasikan derajat keanggotaan x dalam gabungan $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$. Dengan kata lain

$f_{A \cup B}$(x) = [f_A(x) , f_B (x)],

Indek Kekaburan

Indeks kekaburan dari suatu himpunan bagian kabur didasarkan pada ***Jarak Hamming*** dan ***Jarak Euclides*** antara himpunan bagian kabur tersebut dan himpunan bagian sederhana yang terdekat. Oleh karena itu pada pembahasan berikut terlebih dahulu akan dibahas Jarak Hamming dan Jarak Euclides. Kemudian Himpunan Bagian Sederhana yang terdekat ke Himpunan Bagian Kabur dan Indeks Kekaburan.

Jarak Hamming dan Jarak Euclides

Misalkan S = { $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ }, $\mathcal{A}$ C S dan $\mathcal{B}$ C S. Jarak Hamming antara $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$, diberi notasi d ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) didefinisikan sebagai berikut :

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} | f_A(x) - f_B(x)\}|$$

Selanjutnya, Jarak Euclides antara $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$, diberi notasi d ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) didefinisikan sebagai berikut :

$$e.(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\{fA(xi) - fB(xi)\}2}$$

Berdasarkan definisi tersebut di atas, dan mengingat bahwa $f_A(x_i)$, dan $f_B(x_i)$

x ϵ [0,1]. Maka keddua jarak tersebut memiliki sifat sebagai berikut :

$0 \leq d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq n$
dan
$0 \leq e(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \sqrt{n}\sqrt{n}$

(i). d ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) = 0 = e ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) jika dan hanya jika $\mathcal{A} = \mathcal{B}$

(ii). d ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) = n atau e ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) = $\sqrt{n}$ jika dan hanya jika $\mathcal{A} = \Phi$ dan $\mathcal{B}$ = S

atau $\mathcal{A}$ = S, dan $\mathcal{B} = \Phi$, (dan $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ himpunan sederhana) (Setiadji, 2009)

Jadi jarak maksimum dari d ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) dan juga dari e ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) tergantung pada n. Oleh karena itu, untuk mengukur jarak antara $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ seringkali digunakan Jarak Hamming Relatif δ ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) dan Jarak Euclides Relatif ε ($\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$) sebagai brikut :

$$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{i}{n}\, d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{i}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} | f_A(x) - f_B(x) |$$

ε $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\{fA(xi) - fB(xi)\}2}$

Dengan demikian berlaku :

$0 \le \delta\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \le 1$

dan

$0 \le \varepsilon\ (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \le 1$

Catatan :

Banyak alat yang dapat digunakan untuk mengukur jarak antara dua objek. Alat yang digunakan harus disesuaikan dengan kebutuhan. Untuk mengukur jarak dua himpunan kabur $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ digunakan d, e, δ, ε.

Contoh 6 :

Misalkan

S = { a, b, c, d, e, f, g }.

$\mathcal{A}$ = {(a|0,7), (b|0,2), (c|0), (d|0,6), (e|0,5), (f|1), (g|0)}

$\mathcal{B}$ = {(a|0,2), (b|0), (c|0), (d|0,6), (e|0,8), (f|0,4) (g|1)}.

Hitunglah :

a). d $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, b). δ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, c). e $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, d). ε $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Penyelesaian :

a. d $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ = |0,7 – 0,2| + |0,2 – 0| + |0 – 0| + |0,6 – 0,6| + |0,5 – 0,8| + |1 – 0,4| + |0 – 1| = 0,5 + 0,2 + 0 + 0 + 0,3 + 0,6 + 1 = 2,6

b. δ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{7}$ d $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{7}$ (2,6) = 0,37

c. e^2 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, = { e $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$}^{2} = $(0{,}7 - 0{,}2)^2 + (0{,}2 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0{,}6 - 0{,}6)^2 + (0{,}5 - 0{,}8)^2 + (1 - 0{,}4)^2 + (0 - 1)^2$
= 0,25 + 0,4 + 0 + 0 + 0,09 + 0,36 + 1 = 2,1

Jadi e $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sqrt{2{,}1}$ = 1,45

d. ε $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{7}}$ e $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{7}}$ (2,1) = 0,79

Pemb
ahasan tersebut di atas hanya berlaku untuk himpunan semesta S yang berhingga S = { $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ }. Bagaimana jika S berupa himpunan bagian bilangan real ?

(i) Bila S = R. Dalam hal ini,

d $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_{-\sim}^{+\sim} |fA(x) - fB(x)|\ dx$

dan

e $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sqrt{\int_{-\sim}^{+\sim} \{fA(x) - fB(x)\}2\ dx}$

dengan catatan kedua integral tersebut memiliki harga yang tak berhingga.

(ii) Bila S = [a ,b]. Misalkan S = [a ,b]. dengan $-\infty < a < b < +\infty$. Jadi S berupa interval terbatas. Dalam hal ini,

d $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_{a}^{b} |fA(x) - fB(x)|\ dx$

dan

e$(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sqrt{\int_{a}^{b} \{fA(x) - fB(x)\}2\ dx}$

δ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{b-a}$, d $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ dan

ε $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$, e $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (Setiadji, 2009)

Contoh 7 :

Diketahui S = [0, 3] C R, $\mathcal{A}$ C S dan $\mathcal{B}$ C S, dengan $f_{\mathcal{A}}(x) = x^2$, x ϵ S dan

$f_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1}{4}(x - 2)$, , x ϵ S.

Hitunglah : a) d $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, b). δ $(\mathcal{A}$,

$\mathcal{B}$), c). e $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, d). ε $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

Penyelesaian :

a) $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int_0^3 |fA(x) - fB(x)|.dx$

$= \int_0^3 \left|x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right| dx$

$= \left|\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}.\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right|_0^3 = 9{,}375.$

b). δ $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{3-0}$. d $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ = $\frac{1}{3}$. 9,375 = 3,125.

c). e $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$= \sqrt{\int_0^3 \{fA(x) - fB(x)\}^2}$ dx

$= \sqrt{\int_0^3 \left\{x^2 - \frac{1}{4}(x-2)\right\}^2}$ dx

$= \sqrt{\int_0^3 \left\{x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right\}^2 .dx}$

$= \sqrt{47{,}6625} = 6{,}91$

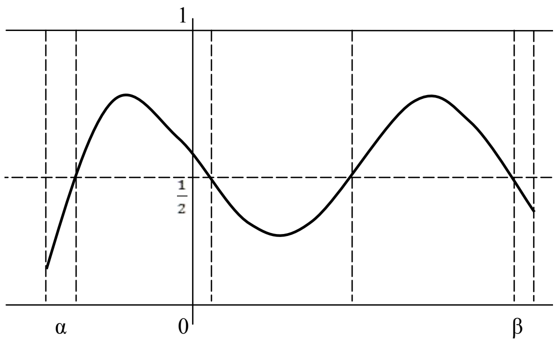
d). ε $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{3-0}}$.

e $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 6,91 = 3,91 (Setiadji, 2009)

Indeks Kekaburan :

Pengertian himpunan bagian kabur A membawa kita pada permasahan berikut. Himpunan bagian sederhana manakah yang paling dekat ke $\underset{\smile}{\mathbf{A}}$? Misalkan A menyatakan himpunan bagian sederhana yang paling dekat ke A. Dapat ditunjukkan bahwa A memiliki fungsi karakteristik sebagai berikut

$$f_A(x) = \begin{cases} 0, & jika\ f_A(x) < 0{,}5 \\ 1, & jika\ f_A(x) < 0{,}5 \end{cases}$$



A = yang diberi garis tebal (M.A. Djauhari, 1994).

Contoh 8 :

Misalkan

S = { a, b, c, d, e, f, g }.

$\mathcal{A}$= {(a|0,2), (b|0,8), (c|0,5), (d|0,3), (e|1), (f|0), (g|0,9)}

Tentukanlah A !

Penyelesaian :

f_A(a) = 0 sebab f_a(a) = 0,2 < 0,5

f_A(b) = 1 sebab f_a(b) = 0,8 > 0,5

f_A(c) = 1 sebab f_a(c) = 0,5

f_A(d) = 0 sebab f_a(d) = 0,3 < 0,5

f_A(e) = 1 sebab f_a(e) = 1

f_A(f) = 0 sebab f_a(f) = 0

f_A(g) = 1 sebab f_a(g) = 0,9 > 0,5

Jadi A = {(a|0), (b|1), (c|1), (d|0), (e|1), (f|0), (g|1)}

Atau, A = { b, c, e, g }.

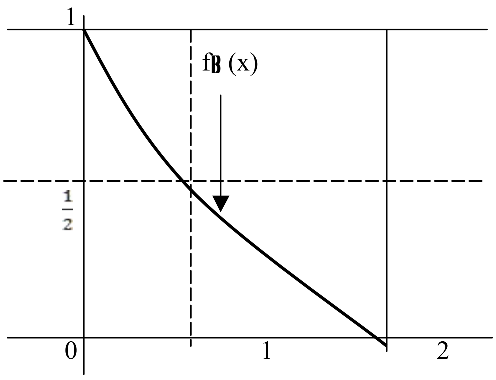
Contoh 9 :

Misalkan S = [0,2] C R dan $\mathcal{B}$ C S yang mana $f_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2$, x ϵ S.

Tentukan B !

Penyelesaian :

$f_{\mathcal{B}}$(x) berupa parabola seperti terlihat pada gambar di bawah ini. $f_{\mathcal{B}}$ (x) fungsi turunandi interval [0, 2].



B = yang digaris tebal

Selanjutnya dicari harga $x \in [0, 2]$ yang memenuhi $f_{\mathcal{B}}(x) = \frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{4}(x - 2)^2 = \frac{1}{2}$

Persamaan ini dapat dituliskan sebagai berikut :

$(x - 2)^2 = 2$ atau $x - 2 = \pm \sqrt{2}$

atau $x = 2 \pm \sqrt{2}$

Karena $x \in [0, 2]$ maka harga x yang memenuhi persamaan $\mathbf{f_B}(x) = \frac{1}{2}$ adalah $x = (2 - \sqrt{2})$.

Jadi B memiliki fungsi karakteristik $\mathbf{f_B}(x) =$

$$\begin{cases} 1, \ jika \ 0 \le x \le 2 - \sqrt{2} \\ 0, \ jika \ 2 - \sqrt{2} < x \le 2 \end{cases}$$

Atau B = $[\,0, \sqrt{2}\,]$

Berdasarkan pengertian himpunan bagian sederhana A yang terdekat ke suatu himpunan kabbur $\mathcal{A}$ didefinisikan ***Indeks Kekaburan*** dari a ke A. Jika digunakan jarak Hamming maka Indeks Kekaburan dari $\mathcal{A}$ disebut ***Indeks Kekaburan Linear*** dan disimbolkan dengan ὐ ($\mathcal{A}$). Sedangkan Jika digunakan Jarak Euclids maka disebut ***Indeks Kekaburan Kuadratik*** disimbolkan dengan ή ($\mathcal{A}$). Kedua indeks tersebut didefinisikan sebagai berikut :

(1) Dalam hal ini S = { $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ }, ὐ ($\mathcal{A}$) dan ή ($\mathcal{A}$) didefinisikan sebagai berikut

ὐ ($\mathcal{A}$) = $\frac{2}{n}$ d ($\mathcal{A}$, A) dan

ή ($\mathcal{A}$) = $\frac{2}{\sqrt{n}}$ e ($\mathcal{A}$, A).

Dari definisi ini, maka kedua indeks tersebut memiliki sifat :

0 ≤ ὐ ($\mathcal{A}$) ≤ 1

dan 0 ≤ ή ($\mathcal{A}$) ≤ 1

Contoh 10 :

Misalkan S = { a, b, c, d, e, f, g }.

$\mathcal{A}$ = {(a|0,2), (b|0,8), (c|0,5), (d|0,3), (e|1), (f|0), (g|0,9)}

Hitunglah ὐ ($\mathcal{A}$) dan ή ($\mathcal{A}$) !

Penyelesaian :

Diketahui $\mathcal{A}$ = {(a|0,2), (b|0,8), (c|0,5), (d|0,3), (e|1), (f|0), (g|0,9)}

Diperoleh A = {(a|0), (b|1), (c|1), (d|0), (e|1), (f|0), (g|1)}, sehingga

d ($\mathcal{A}$, A) = $|0{,}2 - 0| + |0{,}8 - 1| + |0{,}5 - 1| + |0{,}3 - 0| + |1 - 1| + |0 - 0| + |0{,}9 - 1|$

= 0,2 + 0,2 + 0,5 + 0,3 + 0 + 0 + 0,1 = 1,3

e^2 ($\mathcal{A}$, A) = $(0{,}2 - 0)^2 + (0{,}8 - 1)^2 + (0{,}5 - 0)^2 + (0{,}3 - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - 0)^2 + (0{,}9 - 1)^2$

= 0,04 + 0.04 + 0,25 + 0,09 + 0 + 0 + 0,01 = 0,43.

Akibatnya :

e ($\mathcal{A}$, A) = $\sqrt{0{,}43}\sqrt{0{,}43}$ = 0,66

dan ὐ ($\mathcal{A}$) = $\frac{2}{7}$ d ($\mathcal{A}$, A) = $\frac{2}{7}$ (1,3) = 0,37

ή ($\mathcal{A}$) = $\frac{2}{\sqrt{7}}$ e ($\mathcal{A}$, A) = $\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\sqrt{0{,}43}\right)\left(\sqrt{0{,}43}\right)$ = 0,35

(2) Dalam hal $[\alpha, \beta]$, $-\sim < \alpha < \beta < \sim$, maka $\grave{\upsilon}(\mathcal{A})$ dan $\dot{\eta}(\mathcal{A})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\grave{\upsilon}(\mathcal{A}) = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\beta}} \,.\, d(\mathcal{A}, A) = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\beta}} \,|\, f_{\mathcal{A}}(x) - f_A(x) \,|\, dx.$$

$$\dot{\eta}(\mathcal{A}) = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\beta}} \,.\, e(\mathcal{A}, A) = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\beta}} \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} \{fA(x) - fA(x)\}^2} \, dx$$

Dalam hal ini juga berlaku sifat : $0 \leq \grave{\upsilon}(\mathcal{A}) \leq 1$ dan $0 \leq \dot{\eta}(\mathcal{A}) \leq 1$.

Contoh 11 :

Misalkan $S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ dan $\mathcal{A} \subset S$ yang mana $f_{\mathcal{A}}(x) = x \,/\, x \in S$.

Hitunglah $\grave{\upsilon}(\mathcal{A})$ dan $\dot{\eta}(\mathcal{A})$!

Penyelesaian :

Tentukan dulu A, dengan menentukan harga x yang memenuhi persamaan

$f_{\mathcal{A}}(x) = \frac{1}{2}$. Karena $= f_{\mathcal{A}}(x) = x$ maka yang memenuhi persamaan tersebut adalah $x = \frac{1}{2}$. Selanjutnya karena $f_{\mathcal{A}}(x)$ adalah fungsi naik, maka :

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 \;;\; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 \;;\; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Sekarang dihitung $d(\mathcal{A}, A)$ dan $e(\mathcal{A}, A)$. |

$$d(\mathcal{A}, A) = \int_0^1 |\, f_{\mathcal{A}}(x) - f_A(x) \,|\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} |x - 0|\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |\, x - 1 \,|\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x)\, dx = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} x^2 \Big]_0^{\frac{1}{2}} + x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{1}{2} x^2 \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{11}{88} = \frac{1}{4}$$

$$e^2(\mathcal{A}, A) = \int_0^1 \{ f_{\mathcal{A}}(x) - f_A(x) \}^2\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \{x - 0\}^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \{ x - 1\}^2\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \Big]_0^{\frac{1}{2}} + (\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x) \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

SIMPULAN

Dari pembahasan materi ini dapat dicatat bahwa operasi-operasi himpunan kabur, yaitu komplemen, gabunga dan irisan masing-masing mempunyai definisi standar sebaagai berikut.

$$f_A^{\,c}(x) = 1 - f_A(x)$$

$$f_{A \cap B}(x) = \min \{ f_A(x), f_B(x)\}$$

$$f_{A \cup B}(x) = \text{maks} \{ f_A(x), f_B(x)\}$$

Pendefisinian yang lebih umum dari operasi-operasi tersebut menggunakan suatu fungsi. Agar suatu fungsi dikategorikan sebagai komplemen, irisan dan gabungan kabur, maka fungsi-fungsi tersebut harus memenuhi aksioma-aksioma yang ada. Selain itu ada beberapa sifat yang dimiliki operasi-operasi tersebut.

Operasi-operasi himpunan kabur ini merupakan sebagian kecil dari materi himpunan kabur, sehingga untuk mengenal himpunan kabuur secara utuh memerukan lebih banyak waktu lagi. Namun demikian, dengan mempelajari yang sedikit ini kita tertantang dan tertarik untuk belajar dan mendalaminya lebih lanjut.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada Ketua Dewan Redaksi dan seluruh anggota penyunting *Jurnal Suluh Pendidikan* IKIP Saraswati yang telah menerima dan mengedit artikel ini sehingga layak untuk diterbitkan.

DAFTAR PUSTAKA

Djauhari, Maman A., 1994, Himpunan Kabur, Universitas Terbuka, Jakarta.

Klir, G. J. 1988, *Fuzzy Set,* Uncertainty and Information, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Setiadji, 2009, Himpunan & Logika Samar, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Soedjadi, R., 1995, Mengawali pengajaran Pengenalan Graph, Makalah Seminar Pendidikan Matematika, FPMIPA IKIP Surabaya. Tanggal 23 Desember 1995.

Yuli Eko.S.,Tatag, 1998, Oprasi Himpunan Kabur, Makalah Seminar Pendidikan Matematika,

Program Pasca Sarjana IKIP Surabaya.